ANNÉE 1978

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures - Coefficient : 9)

---==oOOo==---

I

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$xy\,\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

où y est la fonction inconnue et x la variable réelle.

Vérifier que cette équation admet la solution particulière définie paramétriquement par les relations :

$$x = \operatorname{tg}\varphi \quad , \quad y = \cos^2\varphi$$

II

Plus généralement, on envisage l'équation différentielle du second ordre (E) de la variable réelle x :

$$(E)\quad xy\,\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - ny\,\frac{dy}{dx} = 0$$

dans laquelle n est un entier positif.

1. - Montrer que l'équation différentielle (E) demeure invariante :

a) lorsque l'on change x en Cx, C étant une constante non nulle.

b) lorsque l'on y remplace y par Cy, C étant une constante non nulle.

.../...

2. - On se propose de former l'intégrale générale de l'équation (E). A cet effet, on utilisera les *deux méthodes* suivantes :

a) On effectue le changement de variable

$$x = e^t$$

t étant une nouvelle variable réelle.

Former l'équation différentielle (E_1) que satisfait alors la fonction y considérée comme fonction de la variable t.

Par intégration de (E_1) déduire l'intégrale générale de (E).

b) On fait le changement de fonction inconnue :

$$y = e^z$$

$z(x)$ étant une nouvelle fonction inconnue.

Former l'équation différentielle (E_2) que satisfait la fonction $z(x)$. Pour former l'intégrale générale de cette équation, on suggère de faire le changement de fonction inconnue $\frac{1}{z'} = v$. En déduire l'intégrale générale de l'équation (E).

3. - Former l'équation des courbes intégrales (C) de l'équation (E) qui satisfont aux conditions :

$$\begin{cases} y(0) = +1 \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=+1} = -\frac{n+1}{4} \end{cases} , \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Donner, dans un repère orthonormé, l'allure générale de ces courbes intégrales suivant que n est pair ou impair.

4. - On considère une courbe (C) ; montrer que l'aire de la région du plan comprise entre cette courbe (C) et la partie positive de l'axe des x, a une valeur finie.

Calculer la valeur de cette aire dans les deux cas suivants :

$$n = 1 \quad , \quad n = 3$$

.../...

III

On considère l'équation (E') déduite de (E) en y faisant n = 0.

Former son intégrale générale et dire quelle est la nature des courbes intégrales.

Déterminer la courbe intégrale (γ) qui admet pour $x = 0$ une ordonnée infinie et dont la tangente au point de l'axe des x d'abscisse + 1 a pour pente - 1.

On suppose que l'image m d'un nombre complexe $z = x + iy$ décrit la courbe (γ).

Déterminer l'équation polaire de la courbe (Γ) décrite par le point M, image du nombre complexe $u = \frac{1}{z}$ lorsque m décrit (γ). En déduire l'allure de (Γ).

IV

Cette question est indépendante des précédentes.

On considère la série de terme général :

$$u_n = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1} + 1}$$

n = 1, 2,.....,

dans lequel a est un réel *supérieur à l'unité.*

Etudier la nature de cette série.

Déduire du résultat précédent la nature de la série de terme général :

$$v_n = \int_a^{+\infty} \frac{\sin^p x}{x^{n+1} + 1}\, dx$$

n = 1, 2,.....,

dans lequel a est toujours un réel *supérieur à l'unité* et où p est un entier positif.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail